

Matematika I

Bab 2 : Sistem Persamaan Linier

Oleh :

Devie Rosa Anamisa

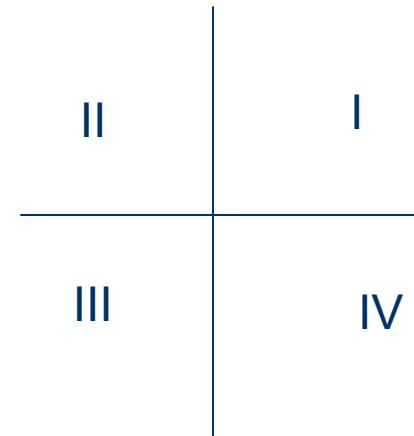


Pembahasan

- Sistem Koordinat Kartesius
- Garis Lurus / Persamaan Garis singgung
- Persamaan Kuadrat
- Sistem Persamaan Linier

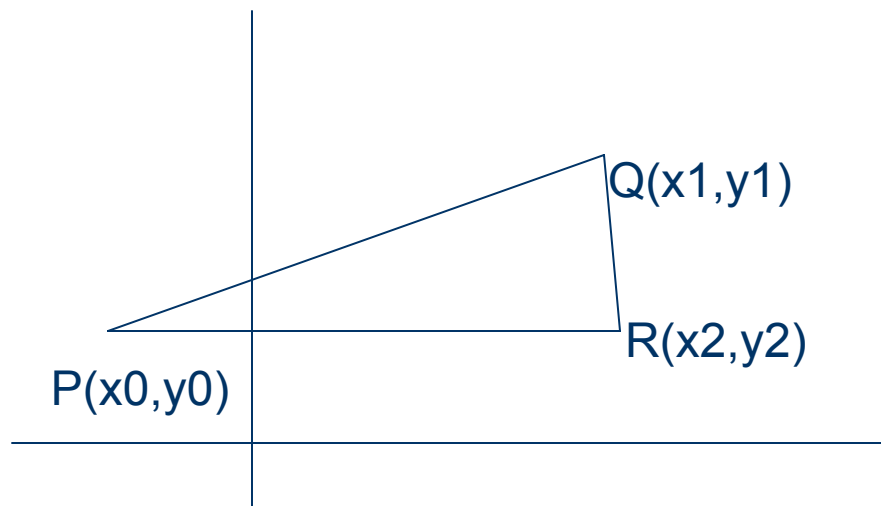
Sistem Koordinat Kartesius

- Sistem koordinat kartesius dalam bidang dimensi 2 terdiri dari 2 komponen, yaitu:
 - Absis (sumbu x)
 - Ordinat (sumbu y)
- Sumbu-sumbu koordinat membagi bidang menjadi 4 bagian yang disebut kuadran
 - Kuadran I : $\{(x,y)|x > 0 \text{ dan } y > 0 \}$
 - Kuadran II : $\{(x,y)|x < 0 \text{ dan } y > 0 \}$
 - Kuadran III : $\{(x,y)|x < 0 \text{ dan } y < 0 \}$
 - Kuadran IV : $\{(x,y)|x > 0 \text{ dan } y < 0 \}$



- Rumus jarak antara 2 buah titik :

$$d(p,q) = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$



Soal 4

1. Buktikan bahwa dua sisinya sama panjang dengan titik sudut $P(1,1)$, $Q(2,4)$ dan $R(8,0)$ adalah sama kaki?
2. Sebutkan persamaan pada lingkaran dengan jari-jari 3 berpusat di $(-1,2)$?

Persamaan Garis singgung

- Garis singgung adalah himpunan titik-titik dibidang yang mempunyai kemiringan garis yang sama.
- Kemiringan garis, m yang melalui titik $p(x_0, y_0)$ dan $q(x_1, y_1)$ dengan $x_0 \neq x_1$.

$$m = (y_1 - y_0) / (x_1 - x_0)$$

- Persamaan garis yang melalui P dan Q adalah:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \text{ atau } y - y_0 = m(x - x_0)$$

- Contoh :

- Carilah persamaan garis yang melalui (4,2) yang sejajar dengan garis $3x-2y = 10$.

- Jawab:

$$3x-2y = 10$$

$$-2y = 10 - 3x$$

$$y = \frac{3}{2}x - 5$$

$$\therefore m = \frac{3}{2}$$

Pada (4,2)

$$y-2 = \frac{3}{2}(x-4)$$

$$2y-4 = 3(x-4)$$

$$2y-4 = 3x-12$$

$$\therefore 3x-2y = 8$$

Soal 5

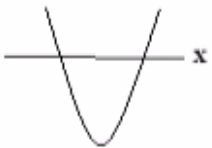
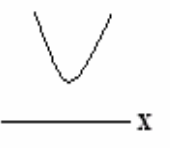
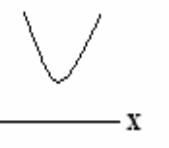
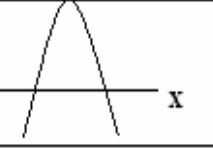
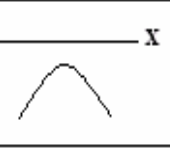
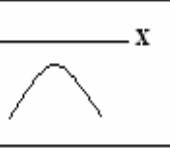
1. Carilah persamaan garis yang melalui titik $P(4,3)$ dan $Q(6,9)$!
2. Cari persamaan garis yang melalui titik $(3,4)$ dan tegak lurus dengan garis $12x+5y=7$!
3. Tentukan persamaan garis singgung $y= x^2 - 2x + 4$ melalui titik $(4,4)$!

Persamaan Kuadrat

- Parabola merupakan salah satu bentuk persamaan kuadrat. Persamaan kuadrat dengan sumbu simetri yang sejajar dengan sumbu y diberikan oleh persamaan kuadrat;
 $Y = ax^2 + bx + c$ dengan a, b dan c bilangan real dan $a \neq 0$.
- Diskriminan = $d = b^2 - 4ac$

Sifat-Sifat Grafik Parabola

- Kecekungan → Grafik parabola cekung terbuka keatas bila $a > 0$, dan cekung terbuka kebawah bila $a < 0$.
- Sumbu simetri → garis $x = -b/2a$, $a \neq 0$ adalah sumbu simetri parabola.
- Titik potong dengan sumbu y, grafik parabola memotong sumbu y di titik $(0, c)$.

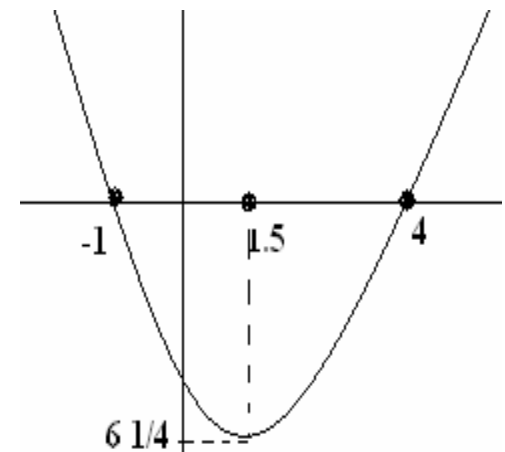
	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

- Titik potong dengan sumbu x:
 - Pada kasus $D > 0$, grafik parabola memotong sumbu x di dua titik yang berbeda yakni $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ dengan :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Pada kasus $D = 0$, grafik parabola menyinggung sumbu x $(-b/2a, 0)$.
- Pada kasus $D < 0$, grafik parabola tidak memotong sumbu x.

- Contoh :
- Buatlah sketsa grafik parabola yang diberikan oleh persamaan $y = x^2 - 3x - 4$!
- Jawab:
 - Titik potong terhadap sumbu x , $\rightarrow y=0$:
 - $F(x) = x^2 - 3x - 4$
 $(x-4)(x+1)$
 $x = 4$ dan $x = -1$
 - Titik potong terhadap sumbu y , $\rightarrow x=0$:
 - $F(x) = x^2 - 3x - 4$
 $F(x) = 4$
 - Sumbu simetri : $x = -b/2a = 3/2 = 1.5$
 $y = D/-4a = -25/4 = 6\frac{1}{4}$



Soal 6

1. Buatlah sketsa grafik parabola yang diberikan oleh persamaan $y = x^2 - 4x + 3$!
2. Buatlah sketsa grafik parabola diberikan oleh persamaan $y = 5 + 4x - x^2$!

Sistem Persamaan Linier

- Bentuk umum dari persamaan linier:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

- Sistem persamaan linier adalah suatu sistem yang dinyatakan dalam gabungan beberapa persamaan linier.

- Persamaan tersebut dalam matriks akan ditulis sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Notasi matriks:

- Matriks adalah larik bilangan-bilangan yang berbentuk empat persegi panjang:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Augmentasi matriks adalah matriks yang merupakan perluasan matriks A dengan menambahkan vektor B pada kolom terakhir.

Augmentasi $A = [AB]$

- Operasi matriks :

- $A+B = B+A$

- $(A+B)+C = A+(B+C)$

- $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & \emptyset & \mu \\ \nu & \rho & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \beta & b + \emptyset & c + \mu \\ d + \nu & e + \rho & f + \delta \end{bmatrix}$$

- $(AB)C=A(BC)$

- $(A+B)C = AC +BC$

- $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce +dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

Metode Persamaan. Linier

- Metode untuk menyelesaikan persamaan linier adalah:
 - Metode Invers Matriks
 - Metode Eliminasi Gaus Jordan
 - Metode Eliminasi Gaus

Metode Invers

- $Ax = B$
- $x = A^{-1} B$
- $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$
 $= \frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$

Metode Eliminasi Gaus Jordan

$$A = \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{1n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{array} \right\}$$

Contoh Eliminasi Gaus Jordan

- Selesaikan sistem persamaan linier berikut :

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$2x_1 + 4x_2 = 8$$

Jawab:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{b_2 - 2b_1} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{b_2/2} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\}$$

$$\therefore x_1 = 2 \quad \text{dan} \quad x_2 = 1$$

- Selesaikan sistem persamaan linier :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

Jawab:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - 2b_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b_1 - b_2 \\ \\ b_3 + b_2 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right\} b_3 / -2 \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b_1 - 3b_3 \\ b_2 + 2b_3 \\ \\ \end{array} \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right\}$$

Contoh Eliminasi Gaus

- Selesaikan sistem persamaan linier berikut :

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$2x_1 + 4x_2 = 8$$

Jawab:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{b_2 - 2b_1} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow x_1 + x_2 = 3 \\ \rightarrow 2x_2 = 2 \end{array}$$

$$\therefore x_1 = 2 \quad \text{dan} \quad x_2 = 1$$

Soal 7

- Selesaikan sistem persamaan linier berikut :

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$2x_1 + 4x_2 = 14$$

- Selesaikan sistem persamaan linier :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$