Bab 7
Sistem Pesamaan Linier

Oleh :

Devie Rosa Anamisa

Pendahuluan

- Bentuk umum dari aljabar linier sebagai berikut:

  $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n = b_1$

  $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n = b_2$

  ....

  $a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n = b_n$

  dimana :

  a = koefisien konstanta

  x = variabel

  n = jumlah variabel

  b = konstanta

- Persamaan tersebut dalam matrik akan ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

  dapat ditulis : A x = B
- Matriks adalah suatu larik bilangan yang berbentuk empat persegi panjang.
- Misal : a_{23} mempunyai arti elemen yang terletak pada baris 2 dan kolom 3

Augmentasi Matrik

- Augmentasi matrik (perluasan matrik) adalah perluasan matrik A dengan menambahkan vector B pada kolom terakhir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & b_m \end{bmatrix}$$

Macam macam matriks

- Matrik simetri, apabila aij = aji, misal matrik simetris 3x3.
- Matrik diagonal adalah matriks bujur sangkar dimana semua elemen kecuali diagonal utama adalah nol.
- Matrik identitas adalah matriks diagonal dimana semua elemen pada diagonal utama adalah 1.
- Matriks segitiga atas adalah matriks dimana semua elemen dibawah diagonal utama adalah nol.
- Matriks segitiga bawah adalah matriks dimana semua elemen diatas diagonal utama adalah nol.
- Matriks pita adalah matrik yang mempunyai elemen sama dengan nol, kecuali pada jalur yang berpusat pada diagonal utama atau disebut matrik tridiagonal.

Operasi Pada Matriks

- Penjumlahan:
  - $A + B = B + A$
  - $(A+B)+C = A + (B+C)$
- Pengurangan:
  - $A - B \neq B - A$
  - $A - B = |B - A|$
- Perkalian:
  - $(AB)C = A(BC)$
  - $(A+B)C = AC + BC$
  - $A(B+C) = AB + AC$
- Invers:
  - $$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{matrix} b1 \\ b2 \end{matrix}$$

maka $A \,.\, A^{-1} = I$

Metode Persamaan Linier

- Eliminasi Gauss
  - Menjadikan persamaan linier yang terdiri dari beberapa bilangan yang tidak diketahui menjadi satu bilangan tak diketahui (dengan membuat suatu matriks triangular atas).
  - Prosedur eliminasi gaus:
    - Susun matriks untuk persamaan yang akan diselesaikan
    - Gunakan operasi penjumlahan sederhana antar baris untuk memperoleh matriks triangular atas / bawah
    - Tulis kembali baris terbaru dalam persamaan matriks
    - Selesaikan sistem persamaan terbaru dengan cara subtitusi mundur

Contoh Eliminasi Gaus

- Carilah x, y dan z dari persamaan berikut ini :
  - X + Y + Z = 0
  - X – 2Y + 2Z = 4
  - X + 2Y – Z = 2
- Jawab :
  - Augmentasi matriks :

1	1	1	0	B1
1	-2	2	4	B2
1	2	-1	2	B3

  - Baris 3 dikurangi baris 1 (B3-B1) :

1	1	1	0
1	-2	2	4
0	1	-2	2

  - Baris 2 dikurangi baris 1 (B2 – B1) :

1	1	1	0
0	-3	1	4
0	1	-2	2

- Baris 3 dikali 3 kemdian ditambah dengan baris 2 :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{array}$$

- $-5Z = 10 \rightarrow Z = -2$ ......(3)

  $-3Y + Z = 4$ ..... (2)

  $-3Y + -2 = 4 \rightarrow -3Y = 6 \rightarrow Y = -2$

  $X + Y + Z = 0$ .....(1)

  $X + -2 + (-2) = 0 \rightarrow X = 4$

- Jadi dapat disimpulkan $x=4$, $y =-2$ dan $z=-2$

- Eliminasi Gaus Jordan
  - Mirip dengan metode eliminasi gaus
  - Algoritma :
    - Tulis sistem persamaan dalam matrik augmentasi [sistem] → [A|B]
    - Ubah matrik [A|B] kedalam bentuk:

      [A|B] → [I|C] dimana I adalah matrik identitas
    - Ketika langkah kedua sudah terpenuhi, tulis matriks [I|C] sebagai hasil akhir persamaan.

Contoh Eliminasi Gaus Jordan

- Carilah x, y dan z dari persamaan berikut ini :
  - X + Y = 3
  - X – 4Y = 8
- Jawab :
  - Augmentasi matriks :

1	1	3	B1
1	-4	8	B2

  - Baris 2 dikurangi 2 dikali baris 1 (B2-2B1) :

1	1	3
1	2	2

  - Baris 2 dibagi 2 :

1	1	3
0	1	1

- Baris 1 dikurangi dengan baris 2 :

  1 0 2

  0 1 1

- Jadi Y = 1 dan X = 2

- Metode Cholesky
  - Mempunyai unsur koefisien variabel yang simetris
  - Matrik simetri dinyatakan dalam produk matrik triangular bawah dengan matrik triangular atas dengan kedua matrik satu sama lain adalah matrik transpose
  - Faktorisasi matrik : $[A] = [U]_{trasnpose} [U]$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

- Hubungan Unsur a_{ij} dan u_{ij} :
  - Pada baris pertama :

    $U_{1n} = a_{in} / \sqrt{a_{11}}$

    Jadi :

    $U_{11} = \sqrt{a_{11}}$, $U_{12} = a_{12} / \sqrt{a_{11}}$, $U_{13} = a_{13} / \sqrt{a_{11}}$

- Pada Baris Kedua :

  $U_{22} = \sqrt{(a_{22} - u_{12}^2)} = \sqrt{(a_{22} - (a_{12}^2 / a_{11})}$

  $U_{23} = [(a_{23} - u_{12}\, u_{13}) / u_{22}]$

- Pada Baris Ketiga :

  $U33 = \sqrt{(a_{23} - u_{13}^2 - u_{23}^2)}$

- Contoh :
- Tentukan matrik $[u]_{transpose}.[u]$ dari matrik

$$[A] = \begin{matrix} 9 & -3 & 6 \\ -3 & 17 & -10 \\ 6 & -10 & 12 \end{matrix}$$

Dengan

$$[u] = \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{21} & u_{13} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{matrix}$$

Pelajari keluar di UAS!!!!

- Metode Iterasi
  - Gaus Seidel
    - Adalah metode yang menggunakan proses iterasi hingga diperoleh nilai-nilai berubah
    - Bila diketahui persamaan linier:

$$a11X1 + a12X2 + ... + a1nXn = b1$$

$$a21X1 + a22X2 + ... + a2nXn = b2$$

$$...... \quad ...... \quad ..... \quad .... \quad ....$$

$$am1X1 + am2X2 + ... + amnXn = bn$$

    - Berikan nilai awal dari setiap Xi (i=1 s/d n) kemudian sistem persamaan linier diatas ditulis menjadi:
      - $X_1 = 1/a_{11} (b_1 – a_{12}x_2 - a_{13}x_3 -....- a_{1n}x_n)$
      - $X_2 = 1/a_{22} (b_2 – a_{21}x_1 - a_{23}x_3 -....- a_{2n}x_n)$
      - $X_n = 1/a_{nn} (b_n – a_{n1}x1-a_{n2}x_2-...a_{2n}x_n)$

- Contoh:
  - Selesaikan sistem persamaan berikut dengan metode iterasi gauss seidel untuk mendapatkan nilai x, y dan z:
    - $3x + y - z = 5$
    - $4x + 7y - 3z = 20$
    - $2x - 2y + 5z = 10$
  - Jawab :
    - Berikan nilai awal : x=0, y=0 dan z=0
    - Susun persamaan menjadi:
      - $X = (5 - y + z)/3 = (5-0+0)/3 = 1.667$
      - $Y = (20-4x+3z)/7 = (20 - 4(1.667)+3(0))/7 = 1.90476$
      - $Z = (10-2x+2y)/5 = (10-2(1,667)+2(1,904) = 2.09524$

- **Iterasi I:**
  - $X = (5 - y + z)/3 = (5-1.90476+2.09524)/3 = 1.73016$
  - $Y = (20-4x+3z)/7 = (20 - 4(1.73016)+3(2.09524))/7 = 2.76644$
  - $Z = (10-2x+2y)/5 = (10-2(1.73016)+2(2.76644) = 2.41451$
- **Iterasi II :**
  - $X = (5 - y + z)/3 = (5- 2.76644 + 2.41451)/3 = 1.54935$
  - $Y = (20-4x+3z)/7 = (20 - 4(1.54935)+3(2.41451))/7 = 3.0065$
  - $Z = (10-2x+2y)/5 = (10-2(1.54935)+2(3.0065) = 2.58286$
- **Iterasi III :**
  - $X = 1.5254$ $Y = 3.0924$ $Z = 2.6268$
- **Iterasi IV :**
  - $X = 1.5115$ $Y = 3.1192$ $Z = 2.6431$
- **Iterasi V :**
  - $X = 1.5080$ $Y = 3.1282$ $Z = 2.6481$
- **Iterasi VI :**
  - $X = 1.5066$ $Y = 3.1311$ $Z = 2.6498$
- Jadi iterasi 6 dan 5 hampir sama maka:
  - $X = 1.5066$ $Y = 3.1311$ $Z = 2.6498$

- Iterasi Jacobi
  - Menggunakan rumusan rekursif untuk menghitung nilai pendekatan solusi persamaan.
  - Proses iterasi dilakukan sampai dicapai suatu nilai yang konvergen dengan toleransi yang diberikan
  - Contoh :

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3$$

  - Persamaan dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:
    - $X_1 = 1/a_{11} (b_1 – a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$
    - $X_2 = 1/a_{22} (b_2 – a_{21}x_1 - a_{23}x_3)$
    - $X_n = 1/a_{nn} (b_n – a_{n1}x_1-a_{n2}x_2)$

- Dengan syarat a_{11}, a_{12}, a_{33} tidak sama dengan nol, apabila ditetapkan nilai awal x1,x2,x3 sebagai x=y=z=0 maka untuk mendapatkan pendekatan pertama dilakukan proses sbb:
  - $X1\ (1) = 1/a11\ (b1 - a12x2 - a13x3)$ dengan $x2 = 0$ dan $x3=0$
  - $X2\ (1) = 1/a22\ (b2 - a21x1 - a23x3\ )$ dengan $x1 = 0$ dan $x3 = 0$
  - $X3\ (1) = 1/a33\ (b3 - a31x1 - a32x2)$ dengan $x1 = 0$ dan $x2=0$
- Pendekatan kedua dengan nilai $x1(2) = x1(1)$, $x2(2)=x2(1)$, $x3(2) = x3(1)$
- Untuk iterasi ke-i perhitungan secara umum dinyatakan dengan:
  - $X1\ (i+1) = 1/a11\ (b1 - a12x2(i) - a13x3(i))$
  - $X2\ (i+1) = 1/a22\ (b2 - a21x1(i) - a23x3(i))$
  - $X3\ (i+1) = 1/a33\ (b3 - a31x1(i) - a32x2(i))$

- Contoh :
  - $3x + y - z = 5$
  - $4x + 7y - 3z = 20$
  - $2x - 2y + 5z = 10$
- Jawab:
  - Langkah I : $x=0$, $y=0$ dan $z=0$
    - $x = (5-0+0)/3 = 1.667$, $y = (20-0+0)/7 = 2.857714$ dan $z = (10-0+0)/5 = 2$
  - Langkah 2 :
    - $X = (5-2.85+2)/3 = 1.38$
    - $Y = (20 - 4(2.85)+3(2))/7 = 2.761$
    - $Z = (10-2(1.667)+2(2.85))/5 = 2.47619$
  - Dst sampai mencapai toleransi yang mendekati.

Terima Kasih